2° Μάθημα:

26/ 2/2019

Π.χ. Να αποδειχθούν οι ανισότητες $\|f\|_2^2 \le \|f\|_1 \cdot \|f\|_\infty$ και $\|f\|_1 \le \sqrt{2}\cdot\|f\|_2 \quad \forall f \in C[-1,1]$.

Λύση:

- $\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \le \int_{-1}^{1} \max_{-1\le y\le 1}|f(y)|\cdot|f(x)|dx =$

$= \max_{-1\le y\le 1}|f(y)| \cdot \int_{-1}^{1}|f(x)|dx = \|f\|_\infty \cdot \|f\|_1$

- $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} 1\cdot|f(x)|dx = (1,|f|) \le \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \left(\int_{-1}^{1} 1^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$

$= \sqrt{2}\cdot\|f\|_2$

Αντίστοιχα, $f=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ ορισμένη στα σημεία $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

$\|f\|_2^2 \le \|f\|_1 \cdot \|f\|_\infty, \quad \|f\|_1 \le \sqrt{n}\cdot\|f\|_2 \quad \forall f \in C_n$

$\|f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} |f_i|^2 = \max|f_i| \cdot \sum_{i=1}^{k}|f_i| = \|f\|_\infty \cdot \|f\|_1$

Ομοιόμορφη Προσέγγιση:

Προσέγγιση των συναρτήσεων $f \in C[a,b]$ στον P_n με την $\|\cdot\|_\infty$. Το πολυώνυμο $p_n^* \in P_n$ είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in C[a,b]$ στον P_n αν-ν

$\boxed{\|f-p_n^*\| \le \|f-p\|_\infty}, \quad \forall p \in P_n$

$E_n(f) = E_n(R[a,b])$

Ορίζουμε ως συνάρτηση σφάλμα $e = f - p_n^*$

Χαρακτηρισμός της Βέλτιστης Ομοιόμορφης Προσέγγισης:

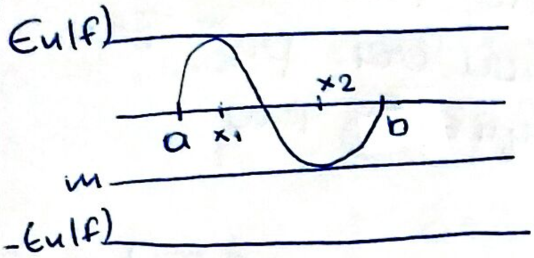
Θεώρημα: Έστω P_n^* η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της $f \in C[a,b]$ στον P_n τότε υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε

$$|f(x_1) - P_n^*(x_1)| = |f(x_2) - P_n^*(x_2)| = \|f - P_n^*\| = E_n(f)$$

και $e(x_1) = -e(x_2)$, $\max\limits_{a \le x \le b} |e(x)| = \|f - P_n^*\| = E_n(f)$

Αποδ: Επομένως η καμπύλη $y = e(x)$ θα βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = E_n(f)$ και $y = -E_n(f)$ και θα βρίσκεται σε τουλάχιστον μια ευθεία, έστω στην $y = E_n(x)$ μόνο.

Έστω $m = \min\limits_{a \le x \le b} e(x) > -E_n(f)$



Έστω $c = \dfrac{E_n(f) + m}{2} > 0$.

Θεωρώ το πολυώνυμο $q_n(x) = P_n^* + c$

$\|f - q_n^*\| = \|f - p_n^* - c\|$

$\cdot\, f(x) - q_n(x) = f(x) - P_n^*(x) - c = e(x) - c$

$\max e(x) - c = E_n(f) - c$

$\min e(x) - c = m - c$

άρα $m - c \le e(x) - c \le E_n(f) - c$

όμως $c = \dfrac{E_n(f) + m}{2} \Leftrightarrow m - c = -E_n(f) + c$

άρα $-(E_n(f) - c) < e(x) - c = f(x) - q_n \le E_n(f) - c$

$\Leftrightarrow \|f - q\| = E_n(f) - c \le \|f - p_n^*\|$ άτοπο

$e(x) = f(x) - c$ $\quad \exists\, x_2 \in [a,b]$ τ.ω. $f(x_2) - c = E_n(f)$

$\exists\, x_2 \in [a,b]$ τ.ω. $f(x_2) - c = -E_n(f)$

$\max f(x) - c = -\min f(x) \Leftrightarrow P_0^* = c = \dfrac{\min f(x) + \max f(x)}{2}$

$E_n(f) = \max f(x) - \min f(x)/2$

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ με $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$ λέγεται εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για την συνάρτηση σφάλμα $e = f - P_n^*$ αν

$$|e(x_j)| = |f(x_j) - p_n^*(x_j)| = ||f - p_n^*|| = E_n(f), \; j=0,1,\dots,n$$

και $e(x_j) = -e(x_{j+1}) \Leftrightarrow f(x_j) - p_n^*(x_j) =$

$$= -(f(x_{j+1}) - P_n^*(x_{j+1}))$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f \in C[a,b]$. Το P_n^* είναι βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο P_n αν-ν υπάρχει ένα εναλλασσόμενο σύνολο σημείων για την $e = f - p_n^*$ αποτελούμενο από $n+1$ στοιχεία.

<u>Αποδ.</u>: $(\Leftarrow)$ Έστω $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ το σύνολο των εναλλ. σημείων για την $e = f - p_n^*$ και ότι p_n^* δεν είναι βελτ. ομοι. προσ. Άρα υπάρχει $q_n \in P_n$ τ.ω

$$||f - q_n|| = ||f - p_n^*||$$

$$f(x_j) - P_n^*(x_j) = (-1)^{\rho+1} \cdot E_n(f) \qquad \begin{array}{l} \rho = 0 \text{ αν } f(x_0) - p_n f(x_0) = E_n(f) \\ \rho = 1 \text{ αν } f(x_0) - p_n f(x_0) = -E_n(f) \end{array}$$

Αν $f(x_j) - P_n^*(x_j) = ||f - p_n^*|| = E_n(f)$ τότε

$$f(x_j) - q_n(x_j) < f(x_j) - P_n^*(x_j) \Rightarrow P_n^*(x_j) - q_n(x_j) > 0$$

Αν $f(x_j) - P_n^*(x_j) = -||f - P_n^*||$ τότε $f(x_j) - P_n^*$

$$f(x_j) - P_n^*(x_j) < f(x_j) - q_n(x_j) \Rightarrow P_n^*(x_j) - q_n(x_j) < 0$$

Επομένως, το $q_n - p_n^* \in P_n$ αλλάζει πρόσημο σε $n+2$ σημεία $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ το $q_n - p_n^*$ έχει τουλ. $n+1$ ρίζες ανάμεσα στο (x_j, x_{j+1}) Άτοπο

$(\Rightarrow)$ εύκολη.

π.χ. Να βρεθεί η βέλτιστη ομοιομ. προσ. της $f(x) = \sin(4x) \in C[-\pi,\pi]$ στον P_6.

Λύση: Η συνάρτηση $\sin 4x$ έχει σύνολο εναλλ. σημείων

$$\left\{ -\pi+\frac{\pi}{8}, -\pi-\frac{3\pi}{8}, -\pi+\frac{5\pi}{8}, -\pi+\frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right\}$$

η sin δίνει ακρότατο 1 και -1 στα σημεία

$\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

άρα $4x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

Στο $[-\pi,\pi]$ τα ακρότατα θα είναι για

$\kappa = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \rightarrow$ γιατί παίρνω αυτά τα κ ?

Η ίδια είναι συνάρτηση σφάλμα $\Rightarrow P_6^*(x) = 0$

$$P_0^* = P_1^* = P_2^* = P_3^* = P_4^* = P_5^* = P_6^* = 0$$

Θεώρημα: Η βελ.ομ.προσ. P_n^* της $f \in C[a,b]$ στον P_n είναι μοναδική δηλ. $\|f - p_n^*\| = \|f-p\|$ $\forall p \in P_n, p \neq P_n^*$

Αποδ: Έστω ότι δεν είναι μοναδική. Υπάρχει πολυώνυμο $p \in P_n$, $p = P_n^*$ τ.ω. $\|f-p\| = \|f-p_n^*\| = E_n(f)$

Από το θεωρ. κι το πολυων. $q = \frac{p+p_n^*}{2}$ είναι β.ο.π.

Έστω $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ το εναλλ. σύνολο σημείων για την $e = f-q$.

$$f(x_j) - q(x_j) = f(x_j) - \frac{p(x_j) + p_n^*(x_j)}{2} =$$

$$\frac{f(x_j) - p(x_j)}{2} + \frac{f(x_j) - p_n^*(x_j)}{2} = (-1)^{\ell+j} E_n(f) \quad (1)$$

Συνέχεια:

$$\frac{|f(x_j)-p(x_j)|}{2} \leq \frac{1}{2} E_n(f) \text{ και}$$

$$\frac{|f(x_j)-p_n^*(x_j)|}{2} \leq \frac{1}{2} E_n(f) \quad (2)$$

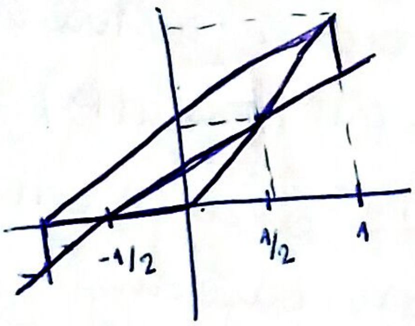
(1),(2) συμπεραίνουμε ότι $f(x_j)-p(x_j)$ και $f(x_j)-p_n^*(x_j)$ θα είναι ομόσημα και τα μέτρα τους ίσα με $\frac{1}{2}E_n(f) \Rightarrow f(x_j)-p(x_j) = f(x_j)-p_n^*(x_j)$

$\Rightarrow p(x_j) = p_n^*(x_j) \quad \forall j=0,1,\dots,n-1.$

Τα πολυώνυμα p και p_n^* ταυτίζονται σε $n+2$ σημεία $\Rightarrow p = p_n^*$??

Ασκηση: Να βρεθεί η β.ο.π. στης $x+|x|$ ορισμένη στο $[-1,1]$ στον P_1.

Λύση: $f(x) = \begin{cases} x-x=0 & , \text{ αν } x \in [-1,0] \\ x+x=2x & , \text{ αν } x \in [0,1] \end{cases}$



Πρέπει να εναλλ. σημ. σύνολο 3 σημείων

$$Y-0 = \frac{1-0}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(x-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$Y-0 = x+\frac{1}{2} = p^*(x)$$